Sous-décalages de type fini apériodiques sur les groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Nathalie Aubrun

(CNRS, Univ. Paris-Saclay, LISN)

Rencontre Equivalence orbitale – Besse-en-Chandesse

Mardi 9 juillet 2024

Partie II : SFT apériodiques sur les GBS

Hier : construction de Kari sur $\mathbb{Z}^2$

1 $1 \quad 0$ $0'$	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ $0'$	2 $0 \quad 0$ 1	1 $0 \quad 1$ 1
$0'$ $0 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	$0'$ $0 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0
0 $\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{1}{3}$ 1	1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{1}{3}$ 1	0 $\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{1}{3}$ 1
1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	2 $1 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	2 $1 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1
0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{1}{3}$ 1	1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2
2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 0$ 1	2 $0 \quad 1$ 1	2 $1 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ $0'$	2 $0 \quad 0$ 1
1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	$0'$ $0 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1
1 $\frac{1}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1	0 $\frac{2}{3} \quad \frac{0}{3}$ 1	1 $\frac{0}{3} \quad \frac{2}{3}$ 1
2 $1 \quad 1$ 1	2 $1 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1	2 $1 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	2 $0 \quad 0$ 1	1 $0 \quad 1$ 1	1 $1 \quad 0$ 0	1 $0 \quad 1$ 1

Objectifs du jour

Construction de SFT apériodiques sur les GBS :

- se ramener à $BS(1, n)$, $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ et $BS(2, 3)$;
- première construction : SFT apériodique sur $BS(1, n)$, faiblement apériodique sur $BS(2, 3)$;
- SFT apériodique sur $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$;
- SFT apériodique sur $BS(2, 3)$ en combinant les deux précédents.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Vous savez déjà tout !

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

1. G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;
2. $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;
3. G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

1. G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;
2. $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;
3. G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Propriétés

Avoir un SFT apériodique :

- si un $H \leq G$ de type fini en possède, alors G aussi ;
- est un invariant de QI pour les groupes de présentation finie.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

1. G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;
2. $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;
3. G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Propriétés

Avoir un SFT apériodique :

- si un $H \leq G$ de type fini en possède, alors G aussi ;
- est un invariant de QI pour les groupes de présentation finie.

$\Rightarrow$ il suffit de traiter les trois cas suivants :

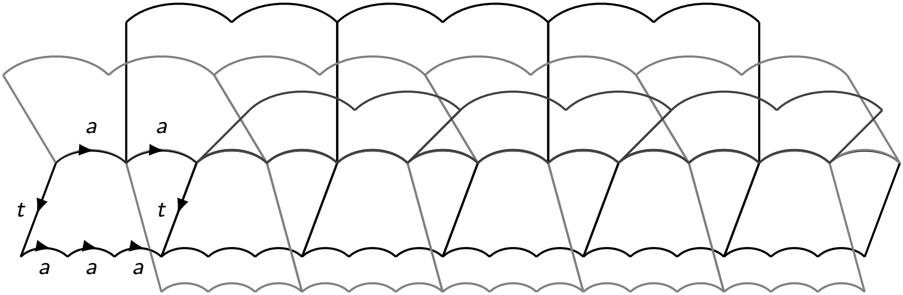
1. $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$;
2. $BS(1, n)$;
3. $BS(2, 3)$.

Première construction sur $BS(m, n)$

$BS(m,n)$

$$BS(m,n) = \langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

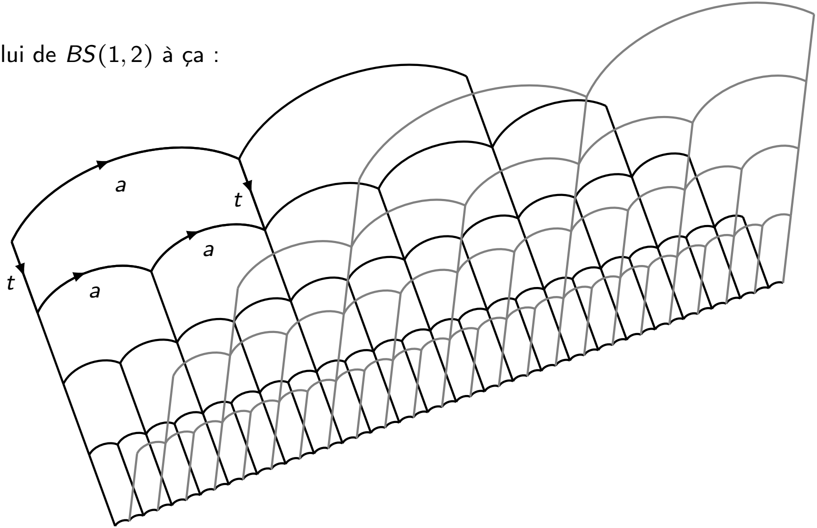
Par exemple, le graphe de Cayley de $BS(2,3)$ ressemble à ça :



$BS(m, n)$

$$BS(m, n) = \langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle$$

Et celui de $BS(1, 2)$ à ça :



De $BS(m,n)$ vers $\mathbb{R}^2$

$$\Phi : \begin{pmatrix} BS(m,n) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & (\alpha(g), h(g)) \end{pmatrix}$$

Si $w \in \{a, a^{-1}, t, t^{-1}\}^*$ est un mot qui représente g :

- $h(g) = h(w) = |w|_t - |w|_{t^{-1}}$;
- $\alpha(g) = \alpha(w)$.

La fonction α est définie récursivement par :

- $\alpha(\varepsilon) = 0$;
- $\alpha(w \cdot t) = \alpha(w \cdot t^{-1}) = \alpha(w)$;
- $\alpha(w \cdot a) = \alpha(w) + \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$;
- $\alpha(w \cdot a^{-1}) = \alpha(w) - \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$.

De $BS(m,n)$ vers $\mathbb{R}^2$

$$\Phi : \begin{pmatrix} BS(m,n) & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & (\alpha(g), h(g)) \end{pmatrix}$$

Si $w \in \{a, a^{-1}, t, t^{-1}\}^*$ est un mot qui représente g :

- $h(g) = h(w) = |w|_t - |w|_{t^{-1}}$;
- $\alpha(g) = \alpha(w)$.

La fonction α est définie récursivement par :

- $\alpha(\varepsilon) = 0$;
- $\alpha(w \cdot t) = \alpha(w \cdot t^{-1}) = \alpha(w)$;
- $\alpha(w \cdot a) = \alpha(w) + \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$;
- $\alpha(w \cdot a^{-1}) = \alpha(w) - \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$.

α et h ne dépendent pas du mot w !!

De $BS(m,n)$ vers $\mathbb{R}^2$

$$\Phi : \begin{pmatrix} BS(m,n) & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & (\alpha(g), h(g)) \end{pmatrix}$$

Si $w \in \{a, a^{-1}, t, t^{-1}\}^*$ est un mot qui représente g :

- $h(g) = h(w) = |w|_t - |w|_{t^{-1}}$;
- $\alpha(g) = \alpha(w)$.

La fonction α est définie récursivement par :

- $\alpha(\varepsilon) = 0$;
- $\alpha(w \cdot t) = \alpha(w \cdot t^{-1}) = \alpha(w)$;
- $\alpha(w \cdot a) = \alpha(w) + \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$;
- $\alpha(w \cdot a^{-1}) = \alpha(w) - \left(\frac{2}{3}\right)^{h(w)}$.

α **et** h **ne dépendent pas du mot** w **!!**

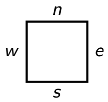
Proposition

Φ est injective ssi $|m| = 1$ ou $|n| = 1$.

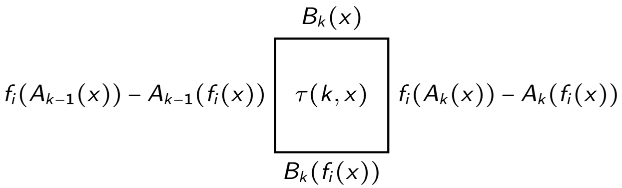
Rappels : sur $\mathbb{Z}^2$ (I)

On a f_i une fonction linéaire rationnelle : $I_i \to \mathbb{R}$.

On construit des tuiles qui calculent f_i : $f_i(n) + w = s + e$



en choisissant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in I_i$, les tuiles



avec $A_k(x) = \lfloor kx \rfloor$ et $B_k(x) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$.

On a seulement un **nombre fini** de tuiles !

Rappels : sur $\mathbb{Z}^2$ (II)

On montre ensuite que :

1. le SFT contient une configuration ;
2. le SFT est apériodique ($\mathbb{Z}^2$ $\Rightarrow$ il suffit de montrer que pas de période horizontale)

Pour le premier point, on construit une configuration en plaçant :

$$\text{la tuile } \tau(k, T^{\ell}(x)) \text{ en } (k, \ell)$$

pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$.

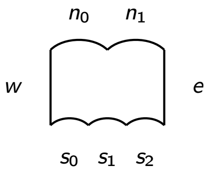
Théorème

Il existe un SFT apériodique sur $\mathbb{Z}^2$.

Adaptation sur $BS(m,n)$ (I)

Cas de $BS(2,3)$, le cas général $BS(m,n)$ est analogue.

On cherche des tuiles de la forme :

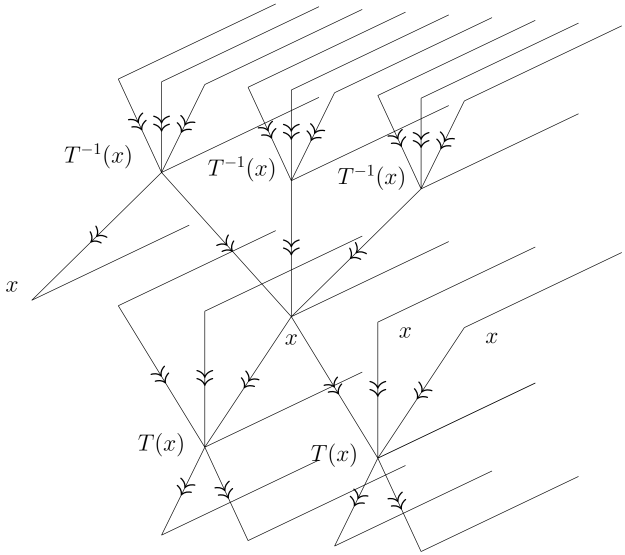


qui calculent une fonction T :

$$T\left(\frac{n_0+n_1}{2}\right)+w=\frac{s_0+s_1+s_2}{3}+e.$$

Adaptation sur $BS(m,n)$ (II)

Les configurations encodent les orbites, avec redondance :



Représentation équilibrée

On définit $\lambda : BS(2,3) \to \mathbb{R}$ qui va prendre en compte les *décalages* entre les feuillets :

$$\lambda(g) := \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{h(g)} \alpha(g)$$

Représentation équilibrée

On définit $\lambda : BS(2,3) \to \mathbb{R}$ qui va prendre en compte les *décalages* entre les feuillets :

$$\lambda(g) := \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{h(g)} \alpha(g)$$

On a notamment que

$$\lambda(g \cdot ta^i) = \frac{3}{2}\lambda(g) + \frac{i}{2} \text{ pour } i = 0, \ldots, 2$$

Représentation équilibrée

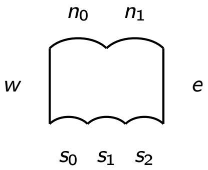
On définit $\lambda : BS(2,3) \to \mathbb{R}$ qui va prendre en compte les *décalages* entre les feuillets :

$$\lambda(g) := \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{h(g)} \alpha(g)$$

On a notamment que

$$\lambda(g \cdot ta^{i}) = \frac{3}{2}\lambda(g) + \frac{i}{2} \text{ pour } i = 0, \dots, 2$$

On peut choisir des tuiles qui permettent de synchroniser les différents feuillets :



$$\begin{aligned}
n_k &= \lfloor (2\lambda(g) + k)\, x \rfloor - \lfloor (2\lambda(g) + (k-1))\, x \rfloor \\
&\quad \text{pour } k = 0, 1 \\
s_k &= \lfloor (3\lambda(g) + k)\; T(x) \rfloor - \lfloor (3\lambda(g) + (k-1))\; T(x) \rfloor \\
&\quad \text{pour } k = 0, 1, 2 \\
w &= \tfrac{1}{2} T\left(\lfloor 2\lambda(g) x \rfloor\right) - \tfrac{1}{3}\lfloor 3\lambda(g)\, T(x) \rfloor \\
e &= \tfrac{1}{2} T\left(\lfloor (2\lambda(g) + 2)\, x \rfloor\right) - \tfrac{1}{3}\lfloor (3\lambda(g) + 3)\; T(x) \rfloor
\end{aligned}$$

Construction explicite

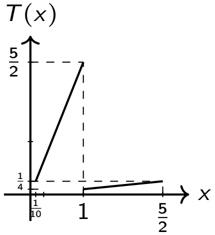
Proposition (A.& Kari, 2013+2021)

Pour T bien choisi on obtient un SFT non vide.

Par exemple :

- pour $BS(1,2)$ on prend la même T que pour $\mathbb{Z}^2$;
- pour $BS(2,3)$ on prend celle-ci :

$$T : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{10};1] \\ \frac{1}{10}x & \text{si} \quad x \in]1;\frac{5}{2}[\end{cases}$$



Construction explicite

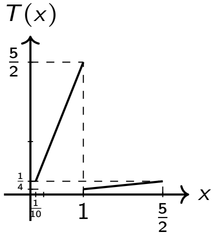
Proposition (A.& Kari, 2013+2021)

Pour T bien choisi on obtient un SFT non vide.

Par exemple :

- pour $BS(1,2)$ on prend la même T que pour $\mathbb{Z}^2$;
- pour $BS(2,3)$ on prend celle-ci :

$$T : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{10}; 1] \\ \frac{1}{10}x & \text{si} \quad x \in]1; \frac{5}{2}[\end{cases}$$



Proposition (A. & Kari, 2013)

Le SFT obtenu est faiblement apériodique, et pas apériodique sur $BS(m,n)$, $|m|, |n| \neq 1$.

Construction explicite

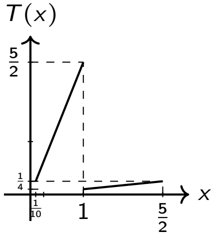
Proposition (A.& Kari, 2013+2021)

Pour T bien choisi on obtient un SFT non vide.

Par exemple :

- pour $BS(1,2)$ on prend la même T que pour $\mathbb{Z}^2$;
- pour $BS(2,3)$ on prend celle-ci :

$$T : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{10};1] \\ \frac{1}{10}x & \text{si} \quad x \in]1;\frac{5}{2}[\end{cases}$$



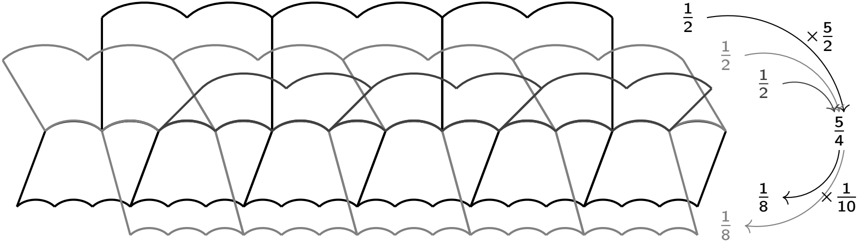
Proposition (A. & Kari, 2013)

Le SFT obtenu est faiblement apériodique, et pas apériodique sur $BS(m,n)$, $|m|,|n| \neq 1$.

Proposition (Esnay & Moutot, 2022)

Le SFT obtenu est apériodique sur $BS(1,n)$.

Exemple de configuration



Période possible : $tat^{-1}ata^{-1}t^{-1}a^{-1}$

Bilan

Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

1. G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_N \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;

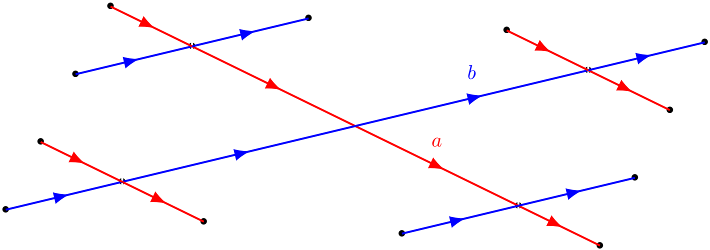
✓ $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;

2. G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Cas de $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$

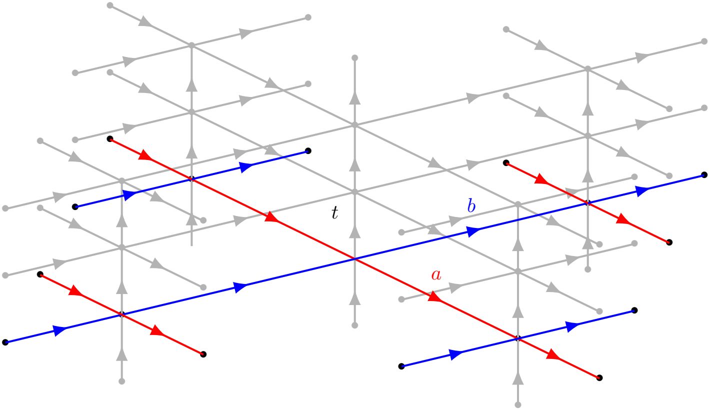
Le groupe $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$

Cas de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, le cas $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ est analogue.



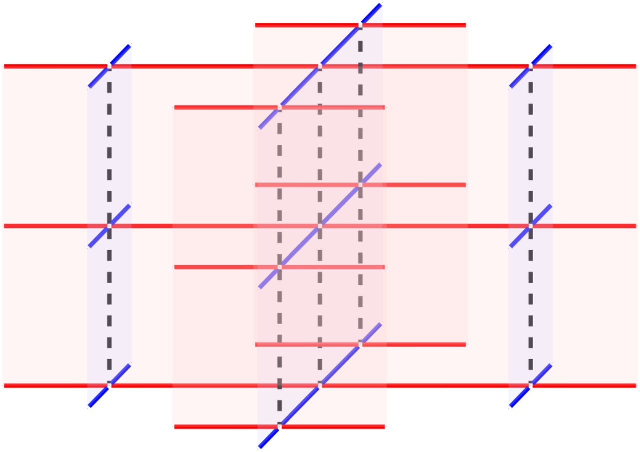
Le groupe $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$

Cas de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, le cas $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ est analogue.



Le groupe $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$

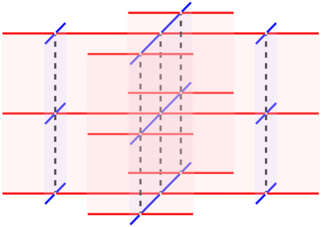
Cas de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, le cas $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}$ est analogue.



Path-folding

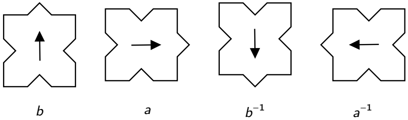
On utilise une technique de *path-folding* :

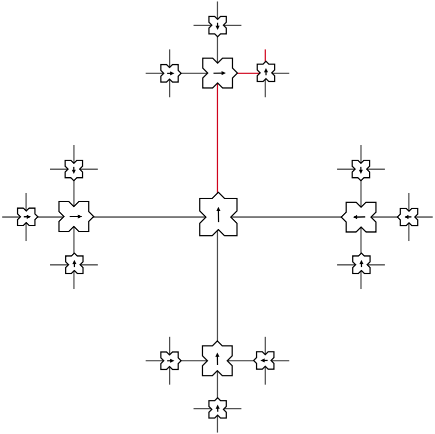
1. Un SFT sur $\mathbb{F}_2$ pour y décrire un chemin infini.
2. On *plie* des configurations de $\mathbb{Z}^2$ le long du chemin.



Flot SFT sur $\mathbb{F}_2$ (I)

On définit un SFT X_f sur $\mathbb{F}_2$



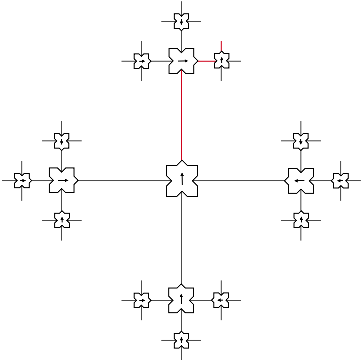


Flot SFT sur $\mathbb{F}_2$ (II)

On étend X_f sur tout $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z} \to$ SFT Y_f.

Propriété (A., Bitar, Huriot-Tattegrain 2023)

- Il existe une bijection $W : X_f \to \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}^{\mathbb{N}}$,
- Si $x \in X_f$ possède une période, alors le mot $W(x)$ est périodique.



$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$: Path-folding (I)

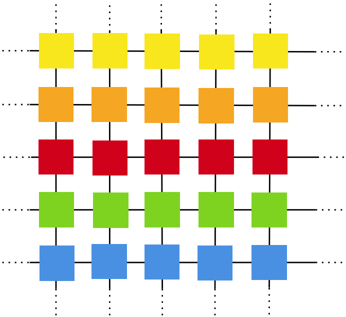
Si X est un SFT plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^2$, **horizontalement expansif**, alors on définit un sous-décalage $Z \subseteq X \times Y_f$:

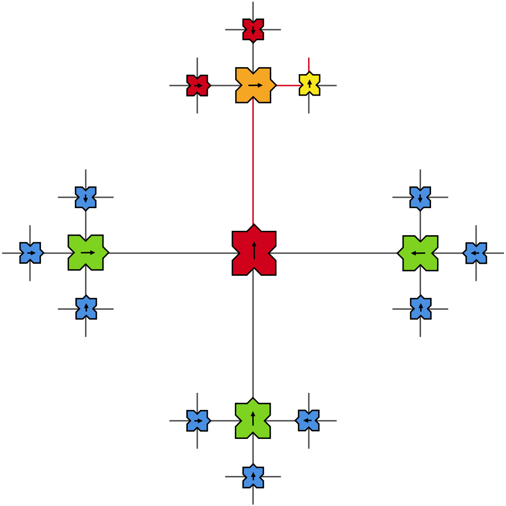
- règles horizontales dans $X \to$ règles le long de t ;
- règles horizontales dans $X \to$ règles le long du flot.

Proposition (A., Bitar, Huriot-Tattegrain 2023)

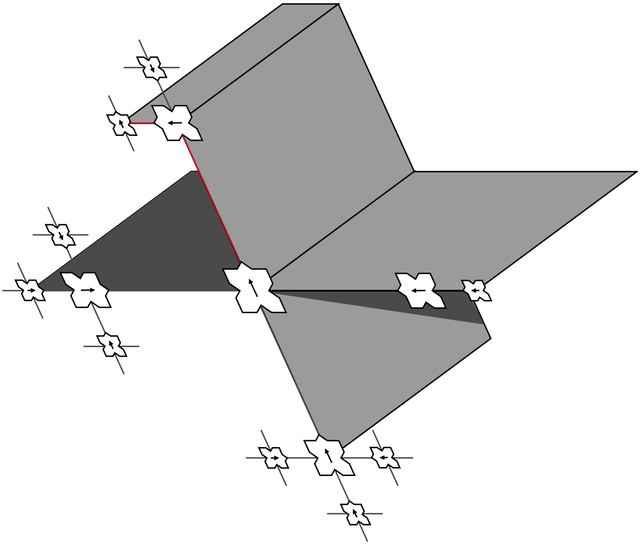
Si X est apériodique et minimal, alors Z aussi.

$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$: Path-folding (II)





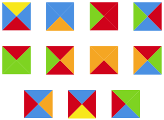
$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$: Path-folding (III)

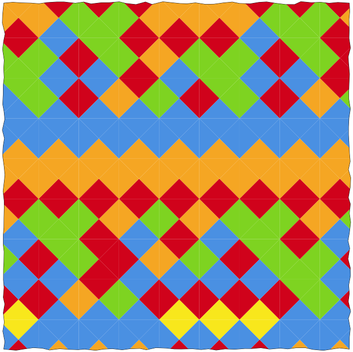


SFT apériodique sur $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$

Proposition (Labbé 2021, Labbé, Mann, McLoud-Mann 2022)

Il existe un SFT minimal sur $\mathbb{Z}^2$ qui est horizontalement expansif.





Theorem (A., Bitar, Huriot-Tattegrain 2023)

$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ possède un SFT apériodique minimal.

Bilan

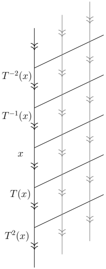
Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

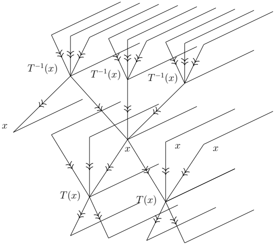
- ✓ G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_N \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;
- ✓ $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;
- 1. G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Path-folding + Kari sur $BS(2,3)$

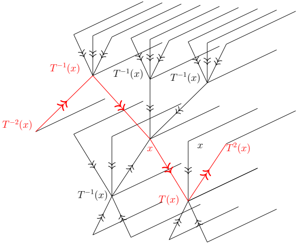
Combiner les deux techniques ?



aperiodique sur $\mathbb{Z}^2$



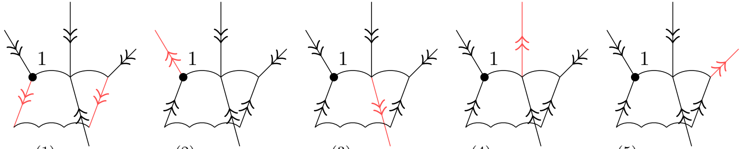
faiblement apériodique sur $BS(2,3)$



apériodique sur $BS(2,3)$?

Flot SFT sur $BS(2,3)$ (I)

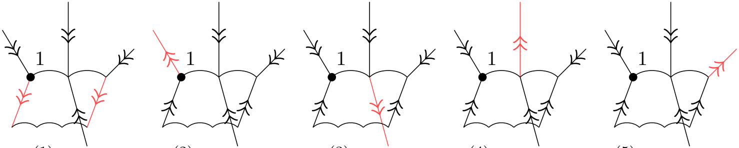
Alphabet $A = \{t, at, t^{-1}, at^{-1}, a^2t^{-1}\}$, SFT $Y_F \subset A^{BS(2,3)}$ donné par les motifs autorisés



$p_1^{(1)} = t$ $p_1^{(2)} = t^{-1}$ $p_1^{(3)} = at$ $p_1^{(4)} = at^{-1}$ $p_1^{(5)} = a^2t^{-1}$

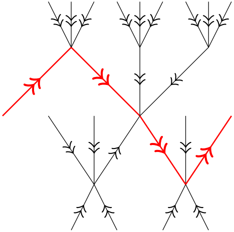
Flot SFT sur $BS(2,3)$ (I)

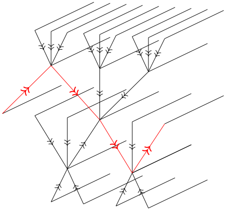
Alphabet $A = \{t, at, t^{-1}, at^{-1}, a^2t^{-1}\}$, SFT $Y_F \subset A^{BS(2,3)}$ donné par les motifs autorisés



$p_1^{(1)} = t$ $\quad p_1^{(2)} = t^{-1}$ $\quad p_1^{(3)} = at$ $\quad p_1^{(4)} = at^{-1}$ $\quad p_1^{(5)} = a^2t^{-1}$

$\Rightarrow$ "SFT" sur l'arbre de Bass-Serre : 4 flèches entrantes et 1 flèche sortante





Flot SFT sur $BS(2,3)$ (II)

Alphabet $A = \{t, at, t^{-1}, at^{-1}, a^2t^{-1}\}$

Proposition

Tout élément $g \in BS(2,3)$ s'écrit de manière unique comme $g = wa^k$, où w est un mot réduit sur l'aphabet A et $k \in \mathbb{Z}$.

Flot SFT sur $BS(2,3)$ (II)

Alphabet $A = \{t, at, t^{-1}, at^{-1}, a^2t^{-1}\}$

Proposition

Tout élément $g \in BS(2,3)$ s'écrit de manière unique comme $g = wa^k$, où w est un mot réduit sur l'aphabet A et $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété (A., Bitar, Huriot-Tattegrain 2023)

- Il existe une bijection $W : Y_f \to A^{\mathbb{N}}$,
- Si $y \in Y_f$ possède une période $g = wa^k$, alors le mot $W(y)$ est périodique de période w ou w^{-1}.

Flot SFT sur $BS(2,3)$ (II)

Alphabet $A = \{t, at, t^{-1}, at^{-1}, a^2t^{-1}\}$

Proposition

Tout élément $g \in BS(2,3)$ s'écrit de manière unique comme $g = wa^k$, où w est un mot réduit sur l'aphabet A et $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété (A., Bitar, Huriot-Tattegrain 2023)

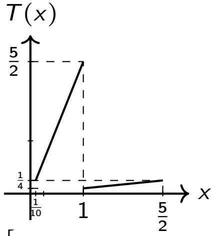
- Il existe une bijection $W : Y_f \to A^{\mathbb{N}}$,
- Si $y \in Y_f$ possède une période $g = wa^k$, alors le mot $W(y)$ est périodique de période w ou w^{-1}.

Il reste à *coller* la construction faiblement apériodique le long du flot Y_f.

Fin de la construction (I)

On choisir la fonction T

$$T : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x \quad \text{si} \quad x \in [\frac{1}{10}; 1] \\ \frac{1}{10}x \quad \text{si} \quad x \in]1; \frac{5}{2}[\end{cases}$$

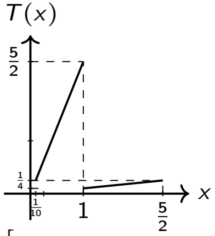


qui a pour inverse

$$T^{-1} : x \mapsto \begin{cases} 10x \quad \text{if} \quad x \in]\frac{1}{10}; \frac{1}{4}[\\ \\ \frac{2}{5}x \quad \text{if} \quad x \in [\frac{1}{4}; \frac{5}{2}] \end{cases}$$

Fin de la construction (I)

On choisir la fonction T



$$T : x \mapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x \text{ si } x \in [\frac{1}{10}; 1] \\ \frac{1}{10}x \text{ si } x \in]1; \frac{5}{2}[\end{cases}$$

qui a pour inverse

$$T^{-1} : x \mapsto \begin{cases} 10x \text{ if } x \in]\frac{1}{10}; \frac{1}{4}[\\ \frac{2}{5}x \text{ if } x \in [\frac{1}{4}; \frac{5}{2}] \end{cases}$$

La construction *à la Kari* nous donne :

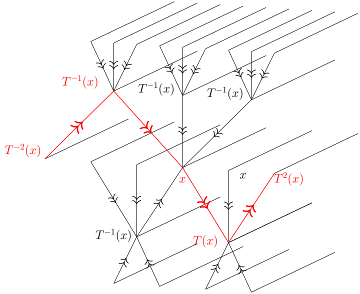
- un SFT X sur $BS(2,3)$ correspondant à T
- un SFT X^{-1} sur $BS(2,3)$ correspondant à T^{-1} (sur $BS(3,2)$ correspondant à T)

Fin de la construction (II)

On définit un SFT Z produit du flot Y_f et de $X \cup X^{-1}$.
La composante dans Y_f induit une nouvelle fonction Φ_y pour tout $y \in Y_F$

$$\Phi_y : \begin{pmatrix} BS(m,n) & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & (\alpha(g), h_y(g)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_y(\varepsilon) &= 0 \\ h_y(w.u) &= h_y(w) + 1 \text{ si } y_w = u \\ &= h_y(w) - 1 \text{ sinon} \\ h_y(w.a) &= h_y(w) = h_y(w.a^{-1}). \end{aligned}$$



Théorème (A., Bitar, Huriot-Tattegrain, 2023)

$BS(2,3)$ admet un SFT apériodique.

Bilan

Théorème (Whyte, 2001)

Si G est un GBS, alors l'un des trois énoncés suivants est vérifié :

- ✓ G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{F}_N \times \mathbb{Z}$ (unimodulaire) ;
- ✓ $G = BS(1, n)$ pour $n > 1$;
- ✓ G est quasi-isometrique à $BS(2, 3)$.

Théorème (A., Bitar, Huriot-Tattegrain, 2023)

Les GBS admettent des SFT apériodiques.

Conclusion

- construction de SFT apériodiques : compliqué...
- ... mais on y arrive !
- adapter des constructions existantes
- π_1(d'autres graphes de groupes) ?

Conclusion

- construction de SFT apériodiques : compliqué...
- ...mais on y arrive !
- adapter des constructions existantes
- π_1(d'autres graphes de groupes) ?

Merci :-)